Varianta 077

Subiectul I

a) $|AB| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. $|AC| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

b) $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$. $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = 0$.

c) Din b) $\Rightarrow m(BAC) = 90^0$.

d) Fie C' simetricul lui C fata de B $\Rightarrow x_{C'} = 2x_B - x_C = 7$. $y_{C'} = 2y_B - y_C = 11 \Rightarrow C'(7,11)$.

e) $\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0) = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.

f) $|z| = \left|\dfrac{3-4i}{-4+3i}\right| = 1$

Subiectul II

1. a) lg 1000=3. b) din $a_4=17$ si $a_3=12 \Rightarrow r=5$ si $a_3=a_1+2r \Rightarrow a_1=2$. c)Se demonstrează prin calcul.

d) Coef $x^3=2\cdot C_4^3=8$. e) $P = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

2. a) $f'(x) + \dfrac{1}{x^2} = 1$, $\forall$ x>0. b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 1-1 = 0$.

c) $\int_1^2 f''(x) = f'(x)\Big|_1^2 = f'(2) - f'(1) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. d) A(2,a)$\in G_f \Leftrightarrow$ f(2)=$a \Rightarrow a = \dfrac{5}{2}$.

e) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x} + x = f(x)$, $\forall$ x>0.

Subiectul III

a) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & y^2-yx & z^2-xz \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$.

b) Inmulțim fiecare linie L_i cu (-a) şi adunăm rezultatul la linia L_{i+1} pentru i =3,2 respectiv 1 şi obținem un determinant din care dăm factori comuni (b-a)(c-a)(d-a) şi după dezvoltarea sa după primul element găsim un determinant de tipul Δ_1 (din pct.a). $\Rightarrow \Delta$ egal cu produsul căutat.

c) $f'(x)$=(x-b)(x-c)(x-d)+(x-a)(x-c)(x-d)+(x-a)(x-b)(x-d)+(x-a)(x-b)(x-c).

d) din (c) $\Rightarrow$ $f'(a)$ = (a-b)(a-c)(a-d).

e) A= $\Delta + \Delta'$, unde Δ' are ultima linie egală cu o combinație liniară ale celorlalte linii ale sale ($L_4=2L_3+3L_2+4L_1$) $\Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow A = \Delta$

f) Dezvoltăm A după ultima linie

$$\Rightarrow \frac{-g(a)\cdot\Delta}{(d-a)(c-a)(b-a)} + \frac{g(b)\cdot\Delta}{(b-a)(c-b)(d-b)} + \frac{-g(c)\cdot\Delta}{(c-a)(d-c)(c-b)} + \frac{g(d)\cdot\Delta}{(d-a)(d-b)(d-c)} \overset{(d)}{=}$$

$$= \Delta\cdot\left(\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} + \frac{g(d)}{f'(d)}\right) \overset{(e)}{\Longrightarrow} \text{ Suma căutată =1.}$$

g) Deoarece ultima linie a lui A este o combinație liniară ale primelor două linii ($L_4= -2L_2-L_1$) $\Rightarrow$ A = 0. Dezvoltând A după ultima linie şi folosind A =0$\overset{(d)}{\Rightarrow}\frac{h(a)}{f'(a)}+\frac{h(b)}{f'(b)}+\frac{h(c)}{f'(c)}+\frac{h(d)}{f'(d)}=0$

Subiectul IV

a) $f''(x)=e^x-1-\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}$. $f'''(x)=e^x-1-\frac{x}{1!}$. $f^{(4)}(x)=e^x-1$.

b) $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=f^{(4)}(0)=0$.

c) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{20x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{60x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(4)}(x)}{120x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{120}=\frac{1}{120}$.

d) $\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}=0\in R\Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală laG_g la $+\infty$

e) Pentru $\begin{cases} x<0\Rightarrow f^{(4)}(x)<0 \\ x>0\Rightarrow f^{(4)}(x)>0 \end{cases}\Rightarrow f^{(3)}$ strict crescătoare pe $(0,\infty)$ şi strict descrescătoare pe $(-\infty,0)\Rightarrow x=0$ este punct de minim pentru $f^{(3)}\Rightarrow f^{(3)}(x)\geq 0,\forall x\in \mathbf{R}\Rightarrow f''$ strict crescătoare pe **R** şi din $f''(0)=0\Rightarrow\begin{cases} f''(x)<0,\forall x<0\Rightarrow f' \text{ descrescatoare pe}(-\infty,0) \\ f''(x)>0,\forall x>0\Rightarrow f' \text{ crescatoare pe}(0,\infty). \end{cases}\Rightarrow x=0$ punct minim pentru f' şi din $f'(0)=0\Rightarrow f'(x)\geq 0,\forall x\in\mathbf{R}$.

f) Deoarece $f'(x)\geq 0,\forall x\in\mathbf{R}$ $f'(0)=0\Rightarrow$ f strict crescătoare pe **R**. $f(0)=0$ rezultă că $f(x)<0,\forall x<0$.

g) Din e) şi f) $\Rightarrow f'(x)>0,\forall x<0\Leftrightarrow e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!},\forall x<0$ (a)

$$f(x)<0,\forall x<0\Leftrightarrow e^x<1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!},\forall x<0 \quad \text{(b)}$$

Din (a), (b) $\Rightarrow 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}<e^x<1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!},\forall x<0$ (c)

Inlocuim $-x^2$ in locul lui x in relația (c) şi integrand membru cu membru obținem inegalitățile:

$\frac{52}{70}<\int_0^1 e^{-x^2}dx<\frac{5651}{7560}\Leftrightarrow 0{,}74<\int_0^1 e^{-x^2}dx<0{,}75$, deci aria cerută este un număr din intervalul (0,74 .0,75).